Projection sur un convexe fermé (205, 208, 213, 219, 253)

Hirsch Lacombe p. 91

thm : Soit C un convexe fermé non vide de H. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que

$$\|x-y\| = d(x,C) := \inf_{c \in C} \|x-c\|.$$

Ce point est appelé projection de x sur C et noté $P_C(x)$. Il est caractérisé par

$$y = P_C(x) \quad \text{ssi} \quad \forall z \in C \quad \mathrm{Re}\langle x-y, z-y\rangle \leq 0.$$

démo : Soit $x \in H$, on note $d = d(x,C)$.

Faire d'abord l'unicité et ensuite l'existence

Existence : Par définition de d, on a existence d'une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in C^{\mathbb{N}^*}$ telle que

$$\|x-y_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}.$$

Montrons que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy.

Pour $p, n \in \mathbb{N}$, on a par l'identité du parallélogramme :

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left(\|y_n-x\|^2 + \|y_p-x\|^2\right)}_{\circledast} = \underbrace{\left\|x - \frac{y_p+y_n}{2}\right\|^2}_{\circledast} + \left\|\frac{y_n-y_p}{2}\right\|^2$$

Mais par convexité de C, on a $\frac{y_n+y_p}{2} \in C$ donc

$$\circledast \leq d^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right) \quad \text{et} \quad \circledast \geq d^2 \quad \Rightarrow \quad d^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right) \geq d^2 + \left\|\frac{y_n-y_p}{2}\right\|^2$$

D'où $\|y_p - y_n\|^2 \leq 2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)$. Donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy de C.

Or comme C est complet et fermé, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $y \in C$ et on a

$$d \leq \|x-y\| \leq \|x-y_n\| + \|y_n - y\| \leq \sqrt{d^2+\frac{1}{n}} + \|y_n-y\|. \quad \text{D'où } \|x-y\| = d.$$

Unicité : Soit y et $y' \in C$ tel que $d(x,C) = \|x-y\| = \|x-y'\|$.

Par l'identité du parallélogramme, on a $\frac{1}{2}\left(\|y-x\|^2 + \|y'-x\|^2\right) = \left\|x - \frac{y+y'}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y-y'}{2}\right\|^2$

Donc $d^2 = \left\|\frac{y'-y}{2}\right\|^2 + \left\|x - \underbrace{\frac{y+y'}{2}}_{\in C}\right\|^2 \geq \left\|\frac{y'-y}{2}\right\|^2 + d^2$. D'où $\|y'-y\|^2 \leq 0$ ie $y'=y$.

Caractérisation :

* Soit $y = P_C(x)$ et $z \in C$. Alors par convexité de C, $\forall t \in]0,1]$, $(1-t)y + tz \in C$.

Donc $\|x-(1-t)y-tz\|^2 = \|x-y+t(y-z)\|^2 \geq d^2 = \|x-y\|^2$

$\Rightarrow \|x-y\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}\langle x-y, y-z\rangle + t^2\|y-z\|^2 \geq \|x-y\|^2$

$\Rightarrow 2\,\mathrm{Re}\langle x-y, y-z\rangle + t\|y-z\|^2 \geq 0$

En faisant tendre t vers 0, on obtient $Re\langle x-y, z-y\rangle \leq 0$.

* Réciproquement, pour $z \in C$, on a :

$$\|x-z\|^2 = \|x-y+y-z\|^2 = \|x-y\|^2 + 2\underbrace{Re\langle x-y, y-z\rangle}_{\geq 0 \text{ hypothèse}} + \underbrace{\|y-z\|^2}_{\geq 0} \geq \|x-y\|^2$$

Ceci étant vrai pour tout $z \in C$, on obtient que $\|x-y\| = d(x, C)$.

prop : Sous les hypothèses du thm, on a $\forall x, y \in H \quad \|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x-y\|$.

démo : Notons $x' = P_C(x)$ et $y' = P_C(y)$. On a alors.

$$\begin{aligned} Re\langle x-y, x'-y'\rangle &= Re\langle x-y-x'+x'-y'+y', x'-y'\rangle \\ &= \underbrace{Re\langle x-x', x'-y'\rangle}_{\geq 0} + Re\langle x'-y', x'-y'\rangle + \underbrace{Re\langle y'-y, x'-y'\rangle}_{\geq 0 \text{ par la caractérisation}} \\ &\geq \|x'-y'\|^2 \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $Re\langle x-y, x'-y'\rangle \leq \|x-y\|\|x'-y'\|$.

D'où $\|x'-y'\| \leq \|x-y\|$ i.e. $\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x-y\|$.

Questions : Projection sur un convexe fermé

- C est complet.

  H est un Hilbert donc il est complet.

  C est un fermé de H. Donc C est complet.

rem : Pour la leçon 253, faire uniquement pour le cas réel.